Komplexe dritte Wurzeln

Lösen von Gleichungen der Form $z^3 = a$ **.**

Datei Nr. 50015

Stand 24. August 2023

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Inhalt

1 Methode zur Berechnung

Die Lösungsmethode, die ich zur Berechnung komplexer Quadratwurzeln in Polarform gezeigt habe, kann man genauso übernehmen. Es ändert sich nur eine Zahl: 3 statt 2:

Methode. :

Gelöst werden soll die Gleichung $z = \sqrt[3]{a}$ **also** $z^3 = a$

Zunächst stellt man a in Polarform dar: $a = |a| \cdot E(\alpha + k \cdot 360^O)$

Der Lösungsansatz $z = r \cdot E(\varphi)$ führt zu $z^3 = r^3 \cdot E(n\varphi)$

Vergleicht man beides, erhält man $r^3 = |a| \Rightarrow r = \sqrt[3]{|a|}$

und $3\varphi = \alpha + k \cdot 360^O$

also $\varphi = \frac{\alpha + k \cdot 360^O}{3} = \frac{\alpha}{3} + k \cdot 120^\circ$

Damit lautet die Lösungsformel: $\boxed{z_k = \sqrt[3]{|a|} \cdot E\left(\frac{\alpha}{3} + k \cdot 120^\circ\right)}$ für k = 0, 1, 2

Die ausführliche Berechnung geschieht dann durch die ausführlichere Formel:

$$z_k = \sqrt[3]{|a|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha}{3} + k \cdot 120^O\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{3} + k \cdot 120^O\right)\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Wer im Bogenmaß rechnet, erhält

$$z_k = \sqrt[3]{|a|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha}{3} + k\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{3} + k \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Jede komplexe Zahl hat also 3 dritte Wurzeln, die sich in der Gaußebene um den Winkel 120^0 unterscheiden.

Man kann nun einzelne Aufgaben ausführlich lösen oder auch die Lösungsformel verwenden.

In den folgenden Aufgaben zeige ich fast immer die ausführliche Methode.

Anmerkung: Manche verwenden anstatt der Eulerschen Funktion $E(\varphi)$ die andere Schreibweise $cis(\varphi)$. Ich gehe darauf nicht ein.

Selten wird auch die exponentielle Darstellung verwendet: $e^{i\varphi}$.

2 Beispiele zur Berechnung dritter Wurzeln

Beispiel 1 a) Gesucht sind die Lösungen von $z^3 = 8$ d. h. $\sqrt[3]{8} = ?$

In der Grundmenge $\mathbb{R}$ hat $z^3 = 2$ nur die Lösung $z = 2$, in $\mathbb{C}$ gibt es 3 dritte Wurzeln aus 8:

Polardarstellung von a = 8: $a = 8 \cdot E(0)$, $\alpha = 0^\circ$

Lösungsansatz $z = r \cdot E(\varphi)$: $z^3 = r^3 \cdot E(3\varphi)$

Vergleichen ergibt: $r^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{8} = 2$

und $3\varphi = 0^\circ + k \cdot 360^\circ$

$\varphi_k = k \cdot 120^\circ \qquad (k = 0, 1, 2)$

Damit erhält man diese dritten Wurzeln aus 8:

$$z_k = 2 \cdot (\cos\varphi_k + i \cdot \sin\varphi_k) = 2 \cdot \left(\cos(k \cdot 120^\circ) + i \cdot \sin(k \cdot 120^\circ)\right)$$

Ausführlich:

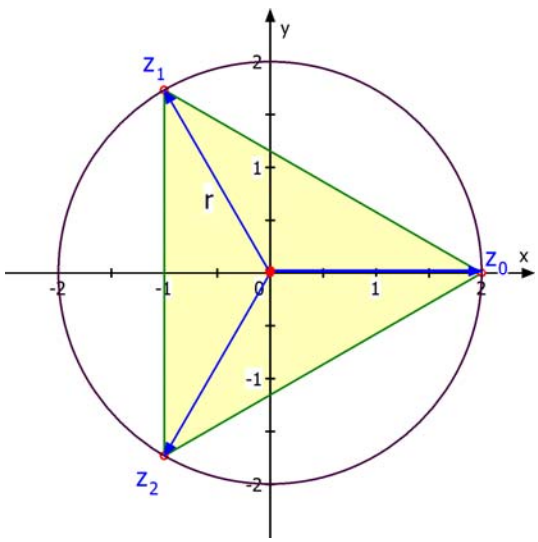
$$z_0 = 2 \cdot \left(\cos\left(0^\circ\right) + i \cdot \sin\left(0^\circ\right)\right) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos\left(120^\circ\right) + i \cdot \sin\left(120^\circ\right)\right) = 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -1 + i \cdot \sqrt{3}$$

$$z_2 = 2 \cdot \left(\cos\left(240^\circ\right) + i \cdot \sin\left(240^\circ\right)\right) = 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2} - i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) = -1 - i \cdot \sqrt{3}$$

Bei Verwendung der Lösungsformel: $\boxed{z_k = \sqrt[3]{8} \cdot E\left(k \cdot 120^\circ\right)}$ für k = 0, 1, 2

Graphische Darstellung der Lösungen in der Gauß-Ebene:



Beispiel 2 $z^3 = i$

Polardarstellung von a = i: $|a| = 1,\ \alpha = 90^O \qquad a = E\left(90^O + k\cdot 360^o\right)$

Lösungsansatz $z = r\cdot E(\varphi)$: $z^3 = r^3\cdot E(3\varphi)$

Vergleichen: $r^3 = 1 \Rightarrow r = 1$ und

$3\varphi = 90 + k\cdot 360^O \Rightarrow \varphi_k = \frac{90+k\cdot 360^o}{3} = 30^O + k\cdot 120^O$

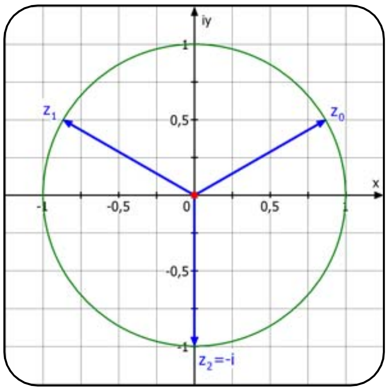
Allgemeine Lösung: $\boxed{z_k = 1\cdot E\left(30^O + k\cdot 120^O\right)}$

also: $\boxed{z_k = \cos(30^O + k\cdot 120)^O + i\cdot\sin(30^O + k\cdot 120)^O}$ für k = 0, 1, 2

Lösungen

$$z_0 = E\left(30^O\right) = \cos\left(30^O\right) + i\cdot\sin\left(30^O\right) = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + i\cdot\tfrac{1}{2}$$
$$z_1 = E\left(150^O\right) = \cos\left(150^O\right) + i\cdot\sin\left(150^O\right) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + i\cdot\tfrac{1}{2}$$
$$z_2 = E\left(270^O\right) = \cos\left(270^O\right) + i\cdot\sin\left(270^O\right) = 0 + i(-1) = -i$$

Graphische Darstellung:



Beispiel 3 $z^3 = -i$

usw.